Chapitre 1

Fonctions numériques - Exercices

1 En fonction de ...

Exercice 1.
On considère un triangle équilatéral ABC et H le pied de la hauteur issue de A.

1. Calculer AH lorsque $AB = 3$. Même question avec $AB = \sqrt{2}$.
2. On pose maintenant x la longueur du côté $[AB]$. Exprimer en fonction de x la longueur AH.
3. Remplacer dans l'expression trouvée à la question précédente x par 3 puis par $\sqrt{2}$ et calculer.

Exercice 2.
On considère PRC un triangle vérifiant $PR = 5$, $RC = 4$ et $\widehat{PRC} = 30°$. On note O le milieu de $[PR]$. A est un point du segment $[RC]$ et B est le point de $[PC]$ tel que (AB) est parallèle à (RO). On note H l'intersection entre (RP) et la perpendiculaire à (RP) passant par A. Si vous êtes en salle informatique (ou chez vous), vous pouvez faire la construction avec le logiciel GeoGebra [1].

1. Dans cette question, on se place dans le cas où $AR = \frac{3}{2}$.
   a. Faire une figure.
   b. Calculer AB puis AH. En déduire l'aire du trapèze $RABO$.
2. Dans cette question on pose $x = RA$ (qui n'est plus nécessairement égal à $\frac{3}{2}$!).
   a. Exprimer AR puis AH en fonction de x.
   b. En déduire l'expression $\mathscr{A}(x)$ de l'aire de $RABO$ en fonction de x.
3. À quelle condition le trapèze $RABO$ est-il un parallélogramme ? Justifier.
4. À quelle condition les points H et O sont-ils confondus ? Justifier.

2 Vocabulaire

Exercice 3.
Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - x - 1$.

1. Calculer les images de -3, de 5, de -2 et de 10.
2. Déterminer tous les antécédents de -1.

1. GeoGebra est un logiciel de géométrie dynamique téléchargeable *gratuitement* à l'adresse http://www.geogebra.org. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises cette année et vous pouvez consulter un petit mode d'emploi là : http://lycee.lagrave.free.fr à la rubrique « contribution » choisir « aide pour tous ».

Exercice 4.
Reprendre les questions de l'exercice précédent pour la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2+7}$.

3 Valeurs interdites. Ensemble de définition

Rappel

Parfois, pour certaines valeurs de x, il n'est pas possible de calculer l'image de x par une fonction f. Dans ce cas on dit que ces valeurs de x sont des *valeurs interdites* pour la fonction. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on peut calculer $f(x)$ est appelé *l'ensemble de définition* de la fonction. On le note généralement $\mathscr{D}_f$.

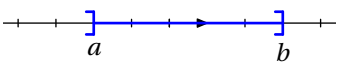
Exercice 5.
On donne $f : x \mapsto \frac{x+3}{2x-10}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+2}$.

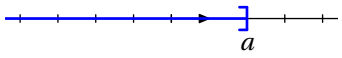
1. Peut-on calculer l'image de -3 par f ? et par g ? Expliquer.
2. Même question pour l'image de 5 par f puis par g.
3. Résoudre l'équation $2x - 10 = 0$. En déduire toutes les valeurs interdites de f, puis l'ensemble de définition de f.
4. Résoudre l'inéquation $x + 2 \geq 0$. En déduire l'ensemble de définition de g.

Rappel

Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f,
– on regarde s'il y a un quotient dans l'expression de $f(x)$: les valeurs de x solutions de l'équation « dénominateur $= 0$ » sont alors des valeurs interdites pour f.
– on regarde s'il y a des racines carrées dans l'expression de $f(x)$.
L'ensemble de définition de f est alors contenu dans l'ensemble des solutions de l'inéquation « expression sous la racine ≥ 0 ».
– l'ensemble de définition peut aussi être restreint par des contraintes de l'énoncé :
si $f(x)$ est la longueur d'un segment, il faut que $f(x)$ soit positif ou nul. . ..

Exercice 6.
Compléter le tableau ci-dessous :

Notation de l'intervalle	Inégalité vérifiée par les éléments x de l'intervalle	Représentation graphique
$[a\,;\,b]$	$a \leq x \leq b$	
	$a < x < b$	
$[a\,;\,b[$		
		

Notation de l'intervalle	Inégalité vérifiée par les éléments x de l'intervalle	Représentation graphique
$[a;+\infty[$	$a \leq x$	
$]a;+\infty[$		
		
	$x < a$	

Exercice 7.
Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto 3x^2 - 5x + 2; \quad g : x \mapsto \frac{3x+2}{2x-3}; \quad h : x \mapsto \frac{2x-5}{(x-3)(2x+5)}; \quad m : x \mapsto \sqrt{x}$$

$$n : x \mapsto \sqrt{3x+2}; \quad p : s : x \mapsto \frac{2x+1}{x^2-4}; \quad q : x \mapsto \frac{2}{4x^2-12x+9}$$

4 Algorithmes

Exercice 8.
On donne ci-dessous l'algorithme 1 qui calcule l'image d'un nombre par une fonction f. Déterminer cette fonction.

```
1 Entrées : Saisir x;
2 début
3 |   Calculer le double de x;
4 |   Retirer 7;
5 |   Élever le résultat au carré;
6 |   Ajouter 1;
7 fin
8 Résultat : Afficher « l'image de x est » le résultat du dernier calcul;
```

Algorithme 1 : Calcul d'une image

Exercice 9.
Écrire l'algorithme permettant de déterminer si un nombre x est un antécédent d'un nombre y par la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x-4}{2x^2+1}$.

Exercice 10.
On donne ci-après l'algorithme 2.

1. Appliquer cet algorithme aux nombres suivants : $x = -3$, $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ puis $x = 3$.
2. Compléter les phrases suivantes :
   - si $x \in]-\infty\,;\,0[$ alors $f(x) =$
   - si $x = 1$ alors $f(x) =$
   - si $x \geq 0$ avec $x \neq 1$ alors $f(x) =$

```
Entrées : Saisir x;
début
    si x ≥ 0 alors
        si x ≠ 1 alors
            Calculer 1/(x−1);
        sinon
            Calculer x² + 1;
            Prendre l'inverse du résultat précédent;
    sinon
        Calculer −2x + 1;
        Calculer l'opposé du carré du résultat précédent;
fin
Résultat : Afficher le résultat du dernier calcul;
```

Algorithme 2 : Par morceaux...

5 Représentations graphiques

Exercice 11.
Pour chacune des figures ci-dessous, indiquer si la courbe tracée peut être la courbe représentative d'une fonction (voir le rappel de la page 5). Si c'est le cas, donner l'ensemble de définition de la fonction et les images des bornes de l'ensemble de définition.

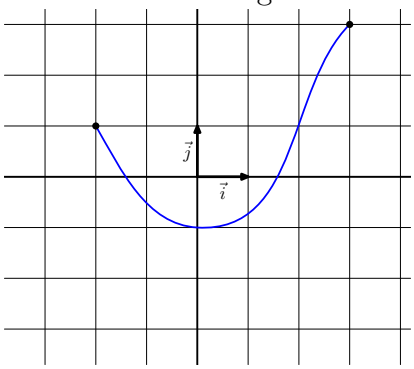


Figure 1

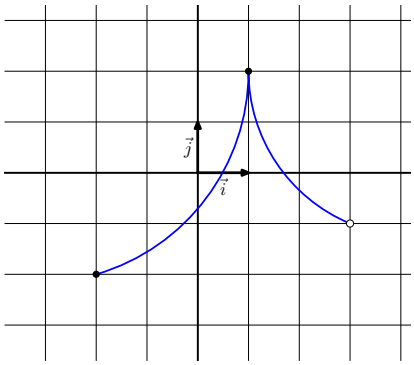


Figure 2

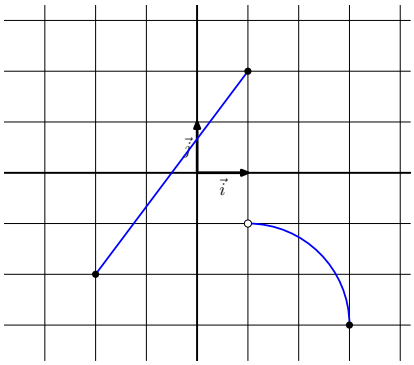


Figure 3

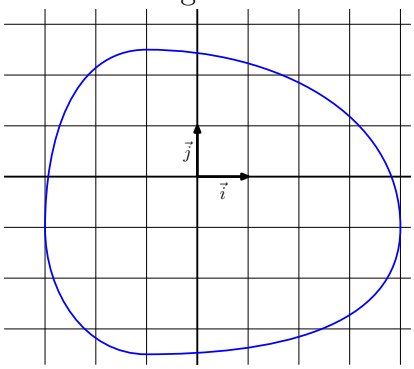


Figure 4

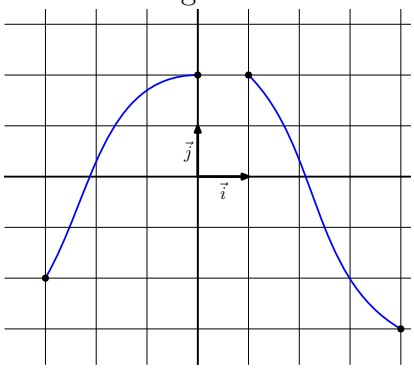


Figure 5

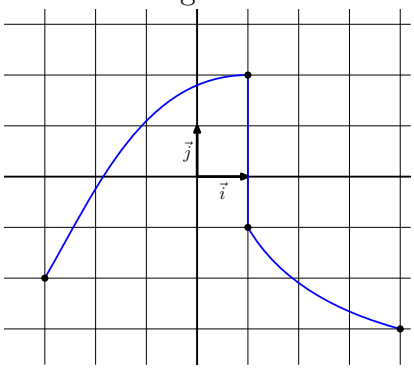


Figure 6

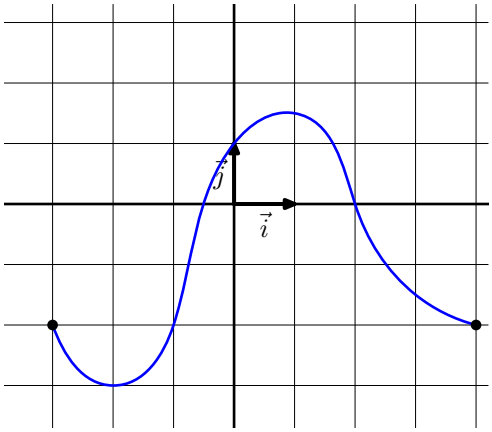
Exemple : sur la figure 1, la courbe est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-2\,;\,3]$. Et graphiquement, on lit : $f(-2) = 1$ et $f(3) = 3$.

Rappel

Soit f une fonction. Pour chaque valeur x de l'ensemble de définition, on peut calculer $f(x)$. Si on appelle y le nombre $f(x)$, on obtient alors un couple $(x;y)$ qui peut être les coordonnées d'un point M dans un repère. L'ensemble des points M qui ont des coordonnées du type $(x;y)$ où $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$ est appelé *courbe représentative* de la fonction f dans le repère.

Exercice 12.
Sur le graphique ci-contre, on a tracé la représentation graphique d'une fonction f. Répondre aux questions ci-dessous en utilisant le graphique.

1. Déterminer $\mathscr{D}_f$.
2. Déterminer l'image de 1 et de -2.
3. Résoudre $f(x) = -2$.
4. Déterminer $f(0)$.
5. Déterminer la valeur minimale de $f(x)$. Pour quelle valeur de x ce minimum est-il atteint ?



Exercice 13.
Que « fait » l'algorithme 3 suivant ?

Entrées : fonction f;
intervalle $[a;b]$;
un entier N;
début
  Calculer $h \leftarrow (b-a)/N$;
  Calculer $x \leftarrow a$;
  pour *k variant de 1 à N* **faire**
    Marquer le point de coordonnées $(x; f(x))$;
    Calculer $x \leftarrow x + h$;
fin

Algorithme 3 : Que fait-il ?

6 Calculatrices

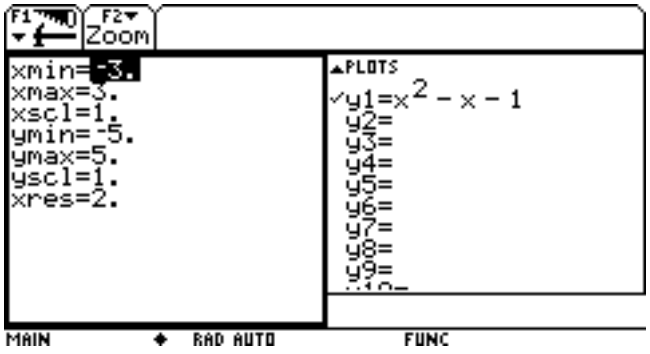
Les caculatrices « graphiques » permettent de représenter graphiquement une fonction mais aussi de dresser des tableaux de valeurs et de lire[2] des résultats (coordonnées de points, maximum, ...).
On considère la fonction f définie sur $[-1\,;\,1]$ par $f(x) = x^2 - x - 1$. Nous allons déterminer une valeur approchée de l'abscisse des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

2. Attention : un résultat « lu » sur un écran, aussi précis soit-il, n'est pas prouvé ! L'activité mathématique consiste à démontrer ce résultat.

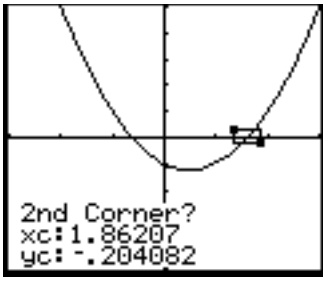
Traçons la représentation graphique de cette fonction à l'aide de la calculatrice : Pour les « casio », on sélectionne le menu `GRAPH` et pour les « TI », on appuie sur la touche `Y=`.
Sur la ligne `Y1=`, on complète par `X^2-X-1`. (On obtient `X` en appuyant sur la touche $\boxed{X,\Theta,T}$.)
Appuyer ensuite sur `EXE` pour les casio ou `GRAPH` pour les TI.

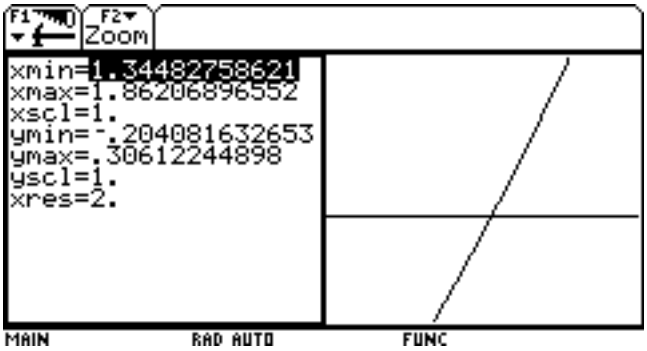
On obtient alors un repère sur l'écran où une courbe est éventuellement tracée. Si la courbe n'apparait pas, c'est sans doute que les unités graphiques sont mal choisies.
Appuyer alors sur la touche `V-Window` ou `Window` un écran affiche alors les valeurs minimales et maximales de `X` et `Y`. Compléter comme ci-après :
`Xmin : -3`, `Xmax : 3`, `scale : 1`,
`Ymin : -5`, `Ymax : 5`, `scale : 1`.
Ces valeurs définissent les bornes inférieures et supérieures en abscisses et en ordonnées de la fenêtre à afficher.

Ci-dessous : l'écran `V-Window` et l'écran `Y=` côte à côte.

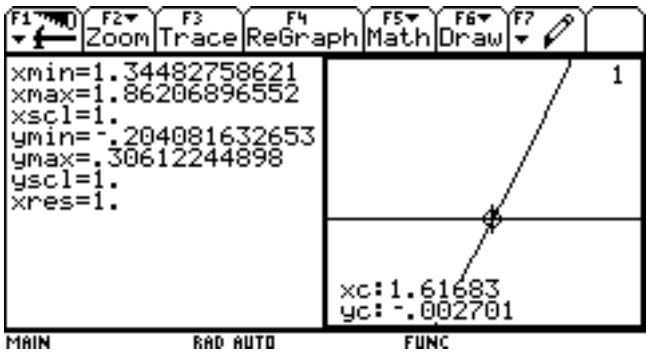


Appuyer maintenant sur la touche `Zoom` et sélectionner `Box` ; déplacer le curseur légèrement au dessus et à gauche d'un point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses et appuyer sur `EXE` ; déplacer à nouveau le curseur pour que le point d'intersection soit dans le rectangle clignotant et appuyer à nouveau sur `EXE`.
La courbe se trace à nouveau dans une nouvelle fenêtre dont on peut voir les caractéristiques (`Xmin, Xmax, ...`) en appuyant sur `Window`.





Revenir au graphique et appuyer sur la touche `Trace` ; déplacer le curseur sur la courbe. Chercher la position du curseur pour laquelle la valeur de `Y` est la plus proche de 0 ; la valeur de x est affichée sur l'écran : c'est l'abscisse cherchée.
On obtient $x \approx 1{,}62$.



Exercice 14.

1. Utiliser cette méthode pour déterminer une valeur approchée de l'autre solution de $f(x) = 0$.
2. Calculer $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ puis une valeur approchée de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Même question avec $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Obtenir un tableau de valeurs :
On peut aussi utiliser la calculatrice pour dresser un tableau de valeurs d'une fonction numérique. Reprenons la fonction f définie précédemment par $f(x) = x^2 - x - 1$.
Appuyer sur [2nde] puis sur [TbleSet] et compléter en indiquant les valeurs suivantes :
`TblStart=-5`, Δ`Tbl=.5`
Appuyer sur [2nde] puis sur [Table] et le tableau apparaît en commençant à la valeur saisie en face de `TblStart` avec des écarts entre les x de Δ`Tbl`.

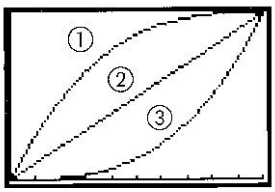
7 Plus difficile...

Exercice 15.
Que « fait » l'algorithme 4 suivant :

```
1  Entrées : une fonction f;
2  un intervalle [a; b];
3  un entier N;
4  début
5      Calculer L ← (b − a);
6      pour k variant de 1 à N faire
7          Calculer L ← L/2;
8          Calculer x ← a;
9          tant que x ≤ b faire
10             Marquer le point de coordonnées (x; f(x));
11             Calculer x ← x + L;
12         Attendre un appui sur une touche;
13 fin
```

Algorithme 4 : Plus difficile !

Exercice 16.
On considère trois récipients A, B et C de même hauteur et de même volume. A est un cylindre, B est un cône sommet en bas et C est un cône sommet en haut. On remplit chaque récipient d'une hauteur x de liquide. On note respectivement f, g et h les trois fonctions qui à x associent le volume de liquide dans chacun des trois récipients A, B et C.
On donne aussi trois courbes, trois tableaux de valeurs et trois formules. Sans utiliser la calculatrice, associer à chaque récipient une courbe, une fonction, une formule. Justifier !



x	0	2	4	6	8	10
$f(x)$	0	4,189	33,51	113,1	268,1	523,6
$g(x)$	0	104,7	209,4	314,2	418,9	523,6
$h(x)$	0	255,5	410,5	490,1	519,4	523,6

$$V_1(x) = \frac{\pi x^3}{6}; \quad V_2(x) = \frac{50\pi x}{3}; \quad V_3(x) = \frac{\pi}{6}\left(x^3 - 30x^2 + 300x\right)$$

8 QCM « bilan »

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x^2 - 5x - 1$. Alors :	☐ l'image de 6 par f est -1 ☐ -1 est un antécédent de 6 par f ☐ $f(-1) = 6$ ☐ 6 est un antécédent de -1 par f
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = -2x^2 + 1$. Alors :	☐ l'image de -2 par f est 9 ☐ 0 a deux antécédents par f ☐ l'équation $f(x) = 4$ a deux solutions ☐ $f(4) = -31$
3. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$. Quels sont les points qui appartiennent à $\mathscr{C}_f$ courbe représentative de f ?	☐ $A(0; -\frac{1}{2})$ ☐ $B(-1; -\frac{1}{2})$ ☐ $D(0; 0)$
4. $M(4; -1)$ est un point de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f. Alors :	☐ $f(-1) = 4$ ☐ 4 est un antécédent de -1 par f ☐ $f(4) = -1$
5. L'ensemble des nombres qui sont strictement inférieurs à 4 mais supérieurs ou égaux à -5 est noté :	☐ $]4\,;\,-5]$ ☐ $[-5\,;\,4[$ ☐ $]-5\,;\,4[$
6. Si x appartient à l'intervalle $]-2\,;\,3]$, alors :	☐ $x = 0$ ☐ x peut être nul ☐ x peut être égal à -2 ☐ x peut être égal à 3
7. Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{2x-3}$. Alors :	☐ $\frac{3}{2}$ n'a pas d'image par g ☐ $\frac{3}{2}$ est une valeur interdite pour g ☐ $\mathscr{D}_g = [\frac{3}{2}\,;\,+\infty[$
8. Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$. Alors :	☐ $x = -3$ est valeur interdite pour h ☐ $x = 2$ est valeur interdite pour h ☐ $\mathscr{D}_h = \mathbf{R}$ ☐ $h(5) = 3{,}6$
9. Un thermomètre électronique mesure la température une fois par heure (à l 'heure « pile »). On note T la fonction qui, à une heure « pile » associe la température correspondante.	☐ T est définie sur $[0\,;\,24]$ ☐ T est déf. pour x entier entre 0 et 23 ☐ T n'est pas une fonction

Table des matières

1 Fonctions numériques - Exercices **1**
1 En fonction de 1
2 Vocabulaire 1
3 Valeurs interdites. Ensemble de définition 2
4 Algorithmes 3
5 Représentations graphiques 4
6 Calculatrices 5
7 Plus difficile. 7
8 QCM « bilan » 8

Liste des Algorithmes

1 Calcul d'une image 3
2 Par morceaux... 4
3 Que fait-il ? 5
4 Plus difficile ! 7

Index

antécédent, 1

ensemble de définition, 2

valeur interdite, 2